Zadatak 221 (Tonka, gimnazija)

Odredite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$|z+i|=|z+2| \quad , \quad |z-2|=|z+2\cdot i|.$$

Rješenje 221

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

www.halapa.com

Neka je $z=x+y\cdot i$.

$$\left.\begin{matrix}|z+i|=|z+2|\\|z-2|=|z+2\cdot i|\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}|x+y\cdot i+i|=|x+y\cdot i+2|\\|x+y\cdot i-2|=|x+y\cdot i+2\cdot i|\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}|x+(y+1)\cdot i|=|(x+2)+y\cdot i|\\|(x-2)+y\cdot i|=|x+(y+2)\cdot i|\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\\\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+2)^2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \quad /^2\\\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+2)^2} \quad /^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2\\\left(\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+(y+2)^2}\right)^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x^2+(y+1)^2=(x+2)^2+y^2\\(x-2)^2+y^2=x^2+(y+2)^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}x^2+y^2+2\cdot y+1=x^2+4\cdot x+4+y^2\\x^2-4\cdot x+4+y^2=x^2+y^2+4\cdot y+4\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x^2+y^2+2\cdot y+1=x^2+4\cdot x+4+y^2\\x^2-4\cdot x+4+y^2=x^2+y^2+4\cdot y+4\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}2\cdot y+1=4\cdot x+4\\-4\cdot x=4\cdot y\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}2\cdot y-4\cdot x=4-1\\-4\cdot x=4\cdot y \quad /:(-4)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}2\cdot y-4\cdot x=3\\x=-y\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\\text{zamjene}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot y-4\cdot(-y)=3 \Rightarrow 2\cdot y+4\cdot y=3 \Rightarrow 6\cdot y=3 \Rightarrow 6\cdot y=3 \quad /:6 \Rightarrow y=\frac{3}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{3}{6}\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{2} \\ x&=-y \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ x=-\frac{1}{2}.$$

Kompleksan broj je:

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i.$$

Vježba 221

Odredite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$|z+i|-|z+2|=0\ ,\ |z-2|-|z+2\cdot i|=0.$$

Rezultat: $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i.$

Zadatak 222 (Katarina, ekonomska škola)

Ako je z = 1 – i, koliko iznosi imaginarni dio broja z^6?

$A.\ -16 \qquad B.\ -8 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 16$

Rješenje 222

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad i^2=-1\quad,\quad i^3=-i.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

$$z^6=(1-i)^6=\left((1-i)^2\right)^3=\left(1-2\cdot i+i^2\right)^3=(1-2\cdot i-1)^3=(1-2\cdot i-1)^3=(-2\cdot i)^3=$$

$$=(-2)^3\cdot i^3=-8\cdot(-i)=8\cdot i=0+8\cdot i.$$

Sada je

$$\operatorname{Im} z^6=\operatorname{Im}(0+8\cdot i)=8.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 222

Ako je z = 1 – i, koliko iznosi realni dio broja z^4?

$A.\ -8 \qquad B.\ -4 \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 8$

Rezultat: B.

Zadatak 223 (Petar, srednja škola)

Koliko ima kompleksnih brojeva za koje vrijede obje jednakosti $|z-i|=2,\ |z-4\cdot i|=1$?

$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 4$

Rješenje 223

Ponovimo!

www.halapa.com

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a^2 = 0 \;\Rightarrow\; a = 0.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta). Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

1.inačica

Neka je z = x + y · i. Ako zadane jednakosti interpretiramo u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini dobit ćemo jednadžbe kružnica.

Prva kružnica:

$$|z - i| = 2 \;\Rightarrow\; |x + y \cdot i - i| = 2 \;\Rightarrow\; |x + (y-1) \cdot i| = 2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2 \;/^2 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right)^2 = 2^2 \;\Rightarrow\; x^2 + (y-1)^2 = 4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} S_1(p, q) = S_1(0, 1) \\ r_1 = 2 \end{matrix}\right\}.$$

www.halapa.com

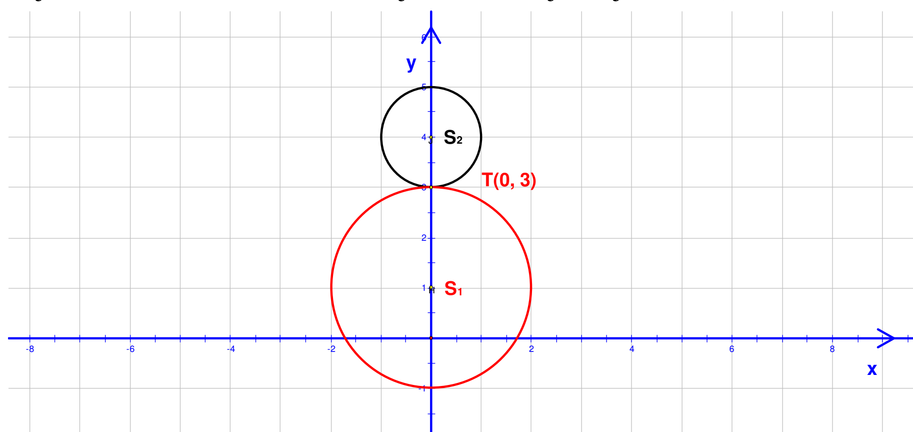
Druga kružnica:

$$|z - 4 \cdot i| = 1 \;\Rightarrow\; |x + y \cdot i - 4 \cdot i| = 1 \;\Rightarrow\; |x + (y-4) \cdot i| = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 1 \;/^2 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\right)^2 = 1^2 \;\Rightarrow\; x^2 + (y-4)^2 = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} S_2(p, q) = S_2(0, 4) \\ r_2 = 1 \end{matrix}\right\}.$$

Nacrtamo li obje kružnice vidimo da se one sijeku samo u jednoj točki T(0, 3).



Dakle, postoji točno jedan kompleksan broj koji zadovoljava obje jednakosti.
Odgovor je pod B.

2.inačica

Neka je z = x + y · i. Ako zadane jednakosti interpretiramo u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini dobit ćemo jednadžbe kružnica.
Prva kružnica:

$$|z-i|=2 \Rightarrow |x+y\cdot i-i|=2 \Rightarrow |x+(y-1)\cdot i|=2 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)^2=2^2 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=4.$$

Druga kružnica:

$$|z-4\cdot i|=1 \Rightarrow |x+y\cdot i-4\cdot i|=1 \Rightarrow |x+(y-4)\cdot i|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-4)^2}=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-4)^2}=1\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+(y-4)^2}\right)^2=1^2 \Rightarrow x^2+(y-4)^2=1.$$

Iz sustava jednadžba odredi se x i y.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+(y-1)^2=4 \\ x^2+(y-4)^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+(y-1)^2=4 \\ x^2+(y-4)^2=1\ /\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+(y-1)^2=4 \\ -x^2-(y-4)^2=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow (y-1)^2-(y-4)^2=3 \Rightarrow y^2-2\cdot y+1-\left(y^2-8\cdot y+16\right)=3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2-2\cdot y+1-y^2+8\cdot y-16=3 \Rightarrow y^2-2\cdot y+1-y^2+8\cdot y-16=3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2\cdot y+1+8\cdot y-16=3 \Rightarrow -2\cdot y+8\cdot y=3-1+16 \Rightarrow 6\cdot y=18 \Rightarrow 6\cdot y=18\ /:6 \Rightarrow y=3.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} y=3 \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+(3-1)^2=4 \Rightarrow x^2+2^2=4 \Rightarrow x^2+4=4 \Rightarrow x^2+4=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0.$$

Postoji točno jedno rješenje:

$$(x,\ y)=(0,\ 3).$$

Odgovor je pod B.

Vježba 223

Koliko ima kompleksnih brojeva za koje vrijede obje jednakosti $|z|=1,\ |z-2|=1$?

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 4

Rezultat: B.

Zadatak 224 (Željko, tehnička škola)

Odredite realan broj b ako je $(4-2\cdot i)\cdot(-1+b\cdot i)=10\cdot i.$

Rješenje 224

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

www.halapa.com

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c \;,\; b = d.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \;,\; a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

www.halapa.com

1.inačica

$$(4 - 2 \cdot i) \cdot (-1 + b \cdot i) = 10 \cdot i \Rightarrow -4 + 4 \cdot b \cdot i + 2 \cdot i - 2 \cdot b \cdot i^2 = 10 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 + 4 \cdot b \cdot i + 2 \cdot i - 2 \cdot b \cdot (-1) = 10 \cdot i \Rightarrow -4 + 4 \cdot b \cdot i + 2 \cdot i + 2 \cdot b = 10 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 + 2 \cdot b + 4 \cdot b \cdot i + 2 \cdot i = 10 \cdot i \Rightarrow (-4 + 2 \cdot b) + (4 \cdot b \cdot i + 2 \cdot i) = 10 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot b - 4) + (4 \cdot b + 2) \cdot i = 0 + 10 \cdot i \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakost kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot b - 4 = 0 \\ 4 \cdot b + 2 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot b = 4 \\ 4 \cdot b = 10 - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot b = 4 \\ 4 \cdot b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot b = 4 \; /:2 \\ 4 \cdot b = 8 \; /:4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 2 \\ b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 2.$$

2.inačica

$$(4 - 2 \cdot i) \cdot (-1 + b \cdot i) = 10 \cdot i \Rightarrow (4 - 2 \cdot i) \cdot (-1 + b \cdot i) = 10 \cdot i \; / \cdot \frac{1}{4 - 2 \cdot i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{10 \cdot i}{4 - 2 \cdot i} \Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{10 \cdot i}{4 - 2 \cdot i} \cdot \frac{4 + 2 \cdot i}{4 + 2 \cdot i} \Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{10 \cdot i \cdot (4 + 2 \cdot i)}{(4 - 2 \cdot i) \cdot (4 + 2 \cdot i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{40 \cdot i + 20 \cdot i^2}{4^2 + 2^2} \Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{40 \cdot i + 20 \cdot (-1)}{16 + 4} \Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{40 \cdot i - 20}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{-20 + 40 \cdot i}{20} \Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{-20}{20} + \frac{40}{20} \cdot i \Rightarrow -1 + b \cdot i = \frac{-20}{20} + \frac{40}{20} \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; -1+b\cdot i=-1+2\cdot i \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\text{jednakost kompleksnih}\\ \text{brojeva}\end{array}\right] \;\Rightarrow\; b=2.$$

Vježba 224

Odredite realan broj b ako je $(2-i)\cdot(-1+b\cdot i)=5\cdot i.$

Rezultat: b = 2.

Zadatak 225 (Jerry, maturant)

U Gaussovoj ravnini prikažite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\begin{cases} |z|\le 3 \\ \operatorname{Re} z\cdot \operatorname{Im} z\le 0\end{cases}$ te izračunajte površinu dobivenoga lika.

Rješenje 225

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad o<a\le b \;\Rightarrow\; a^2\le b^2 \quad , \quad x\cdot y\le 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x\le 0 \;,\; y\ge 0 \\ x\ge 0 \;,\; y\le 0\end{array}\right\}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

www.halapa.com

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina.

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).

Površina kruga polumjera r dana je formulom

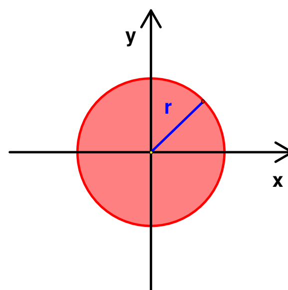
$$P=r^2\cdot\pi.$$

Kružnica polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava naziva se središnja kružnica i njezina je jednadžba

$$x^2+y^2=r^2.$$

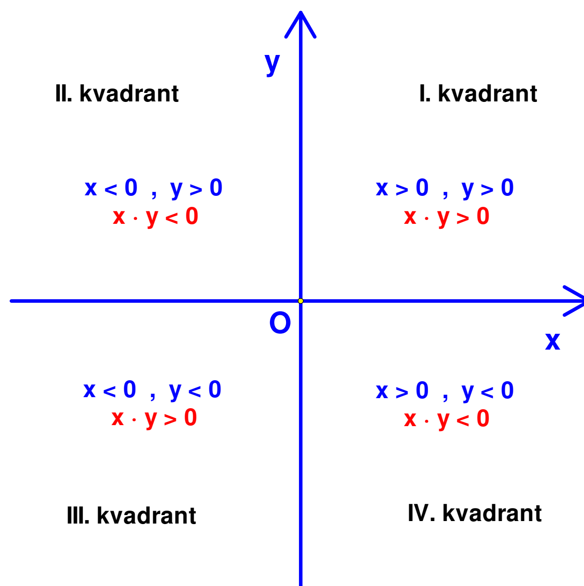
Zatvoreni krug polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava je skup svih točaka (x, y) ravnine za koji vrijedi:

$$x^2+y^2\le r^2.$$



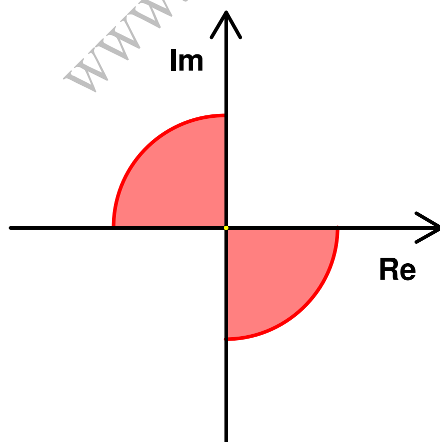
Uređenu trojku (O; x, y) pri čemu su x i y okomiti brojevni pravci s istim ishodištem nazivamo

pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Koordinatne osi x i y ravninu dijele na četiri područja koje nazivamo kvadranti.



$$\left.\begin{array}{l}|z| \le 3 \\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \le 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2} \le 3 \\ x \cdot y \le 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2} \le 3 \ /^2 \\ x \cdot y \le 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \le 3^2 \\ x \cdot y \le 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+y^2 \le 9 \ , \ \text{središte u ishodištu} \ , \ \text{polumjer } r=3 \\ x \le 0 \ , \ y \ge 0 \ , \ \text{drugi kvadrant} \\ x \ge 0 \ , \ y \le 0 \ , \ \text{četvrti kvadrant}\end{array}\right\}.$$



Površina dobivenog lika iznosi:

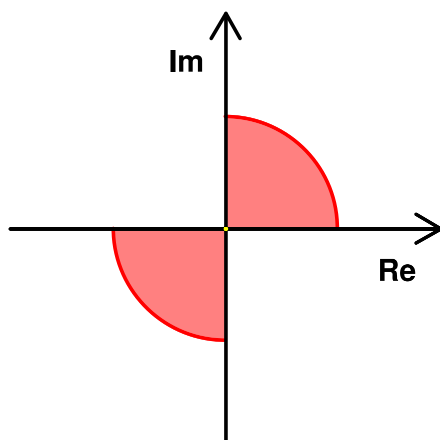
$$P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow \left[r^2 = 9 \right] \Rightarrow P = \frac{9}{2} \cdot \pi.$$

Vježba 225

U Gaussovoj ravnini prikažite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\left\{\begin{array}{l}|z| \le 3 \\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \ge 0\end{array}\right.$ te izračunajte površinu dobivenoga lika.

Rezultat:

www.halapa.com



$$P=\frac{9}{2}\cdot\pi.$$

Zadatak 226 (Marko, maturant)

Koliki je argument kompleksnoga broja $z=\frac{-i+1}{i}$?

$$A.\ \frac{\pi}{4}\qquad B.\ \frac{\pi}{2}\qquad C.\ \frac{3\cdot\pi}{2}\qquad D.\ \frac{5\cdot\pi}{4}$$

Rješenje 226

Ponovimo!

$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\quad,\quad tg\frac{\pi}{4}=1\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad i=\sqrt{-1}\quad,\quad i^2=-1\quad,\quad a^1=a.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \frac{n}{1}=n\quad,\quad a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}.$$

www.halapa.com

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Svaki se kompleksan broj

$$z=x+y\cdot i$$

može prikazati u trigonometrijskom obliku

$$z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi),$$

pri čemu je r modul kompleksnog broja

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

a kut φ argument kompleksnog broja za kojeg vrijedi

$$\varphi=arctg\frac{y}{x}\ \text{ ili }\ \varphi=tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\ ,\ 0\leq\varphi<2\cdot\pi.$$

Oznaka je

$$\varphi=\arg z.$$

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina.
Ako je kompleksan broj u trećem kvadrantu kompleksne ravnine argument se računa po formuli

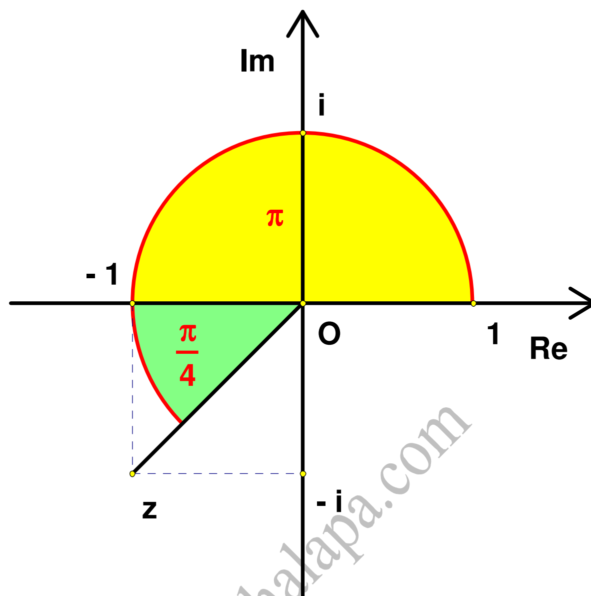
$$\varphi = \pi + arctg\frac{y}{x} \text{ ili } \varphi = \pi + tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Napišimo standardni oblik kompleksnog broja.

$$z = \frac{-i+1}{i} \Rightarrow z = \frac{-i}{i} + \frac{1}{i} \Rightarrow z = \frac{-i}{i} + \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} \Rightarrow z = -1 + \frac{i}{i^2} \Rightarrow z = -1 + \frac{i}{-1} \Rightarrow z = -1 - i.$$

Ili

$$z = \frac{-i+1}{i} \Rightarrow z = \frac{-i+1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} \Rightarrow z = \frac{i^2 - i}{-i^2} \Rightarrow z = \frac{-1-i}{-(-1)} \Rightarrow z = \frac{-1-i}{1} \Rightarrow z = -1 - i.$$



www.halapa.com

Budući da se broj nalazi u trećem kvadrantu kompleksne ravnine, argument glasi:

$$\left.\begin{matrix} z = x + y\cdot i \\ z = -1 - i \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -1 \\ y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\varphi = \pi + arctg\frac{y}{x}\right] \Rightarrow \varphi = \pi + arctg\left(\frac{-1}{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pi + arctg(1) \Rightarrow \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \frac{5\cdot\pi}{4}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 226

Koliki je argument kompleksnoga broja $z = 1 + i$?

$$A.\ \frac{\pi}{4} \qquad B.\ \frac{\pi}{2} \qquad C.\ \frac{3\cdot\pi}{2} \qquad D.\ \frac{5\cdot\pi}{4}$$

Rezultat: A.

Zadatak 227 (Vedran, maturant)

Vrijednost izraza $\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^4$ iznosi:

$$A.\ -1 \qquad B.\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \qquad C.\ i \qquad D.\ 1 - i \qquad E.\ 2\cdot i$$

Rješenje 227

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \left(\left(\frac{i\cdot\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\right)^2 + \left(\left(\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\left(i\cdot\sqrt{3}-1\right)^2}{2^2}\right)^2 + \left(\frac{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{2^2}\right)^2 = \left(\frac{\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot i\cdot\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot i\cdot\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{4}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{-3-2\cdot i\cdot\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}-3}{4}\right)^2 = \left(\frac{-2-2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{4}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{-2\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)}{4}\right)^2 + \left(\frac{-2\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)}{4}\right)^2 = \left(\frac{-2\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)}{4}\right)^2 + \left(\frac{-2\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)}{4}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{-\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)}{2}\right)^2 = \frac{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{2^2} + \frac{\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{2^2} =$$

$$= \frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4} + \frac{1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2+1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2+1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4} = \frac{1+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2+1+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4} =$$

www.halapa.com

$$=\frac{2+2\cdot\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{2\cdot\left(1+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)}{4}=\frac{2\cdot\left(1+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)}{4}=\frac{1+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{2}=$$

$$=\frac{1+i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Odgovor je pod A.

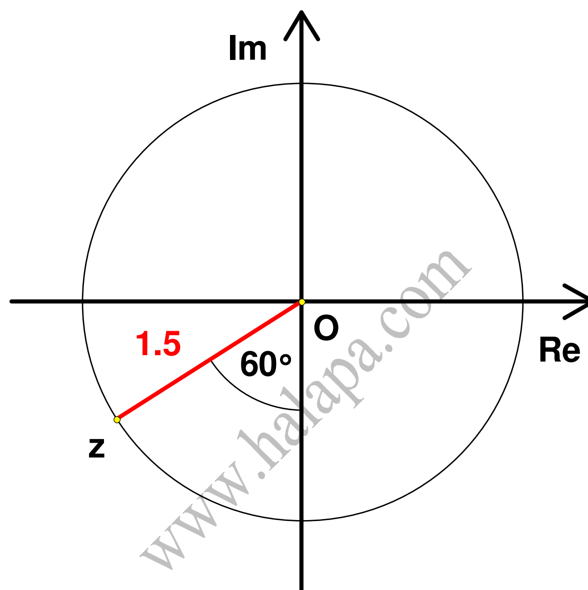
Vježba 227

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 228 (Ines, maturantica)

Odredite kompleksni broj z prikazan na slici.



www.halapa.com

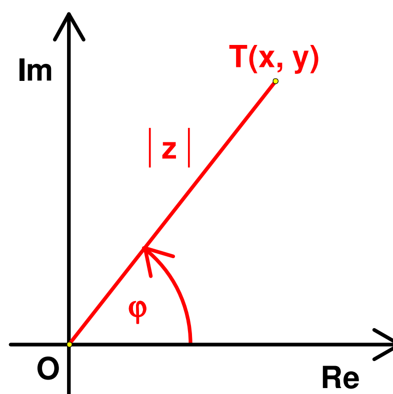
Rješenje 228

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

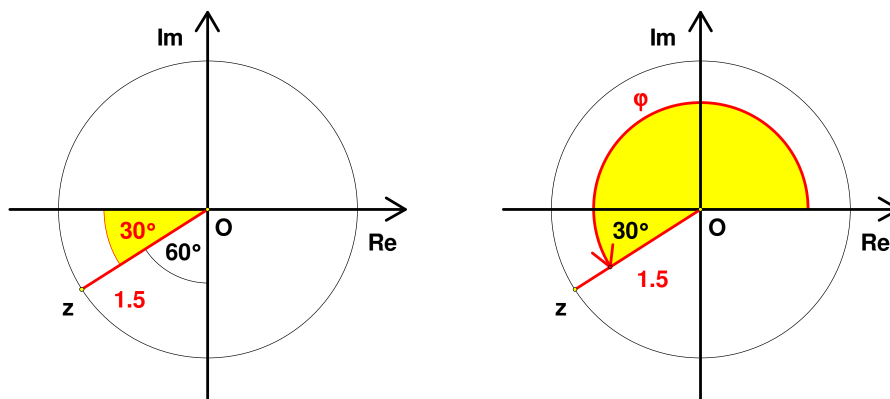
$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Neka je kompleksni broj z = x + y · i, z ≠ 0 prikazan u Gaussovoj (kompleksnoj) ravnini točkom T(x, y).



Označimo s $|z|$ udaljenost točke T od ishodišta koordinatnog sustava, a s φ kut što ga zatvaraju pozitivni dio apscise (realna os) i polupravac točkom T i početkom u ishodištu. Trigonometrijski zapis kompleksnog broja z je

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$



Sa slika vidi se:

$$|z| = 1.5 \quad , \quad \varphi = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

Tada je

$$z = 1.5 \cdot \left(\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ \right).$$

Pretvaranje stupnjeva s u radijane r.

$$r = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot s.$$

$$r = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 210^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 210^\circ = \frac{7 \cdot \pi}{6}.$$

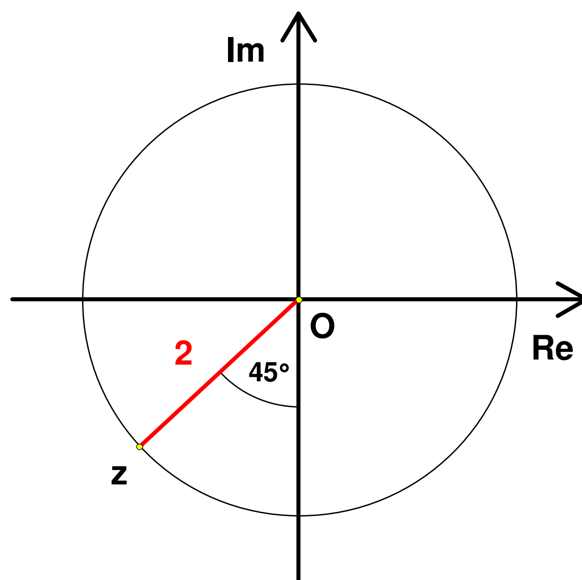
Sada je

$$z = 1.5 \cdot \left(\cos \frac{7 \cdot \pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7 \cdot \pi}{6} \right).$$

www.halapa.com

Vježba 228

Odredite kompleksni broj z prikazan na slici.



Rezultat: $z = 2 \cdot \left(\cos 225^\circ + i \cdot \sin 225^\circ \right)$ ili $z = 2 \cdot \left(\cos \frac{5 \cdot \pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5 \cdot \pi}{4} \right).$

Zadatak 229 (Nikola, maturant)

Koliki je imaginarni dio kompleksnoga broja z ako je $5+3\cdot z+6\cdot i-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i$?

$$A.\ -13 \qquad B.\ -\frac{39}{5} \qquad C.\ -3 \qquad D.\ -\frac{6}{5}$$

Rješenje 229

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x+y\cdot i$ i $x-y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i \Leftrightarrow a=c \ , \ b=d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$5+3\cdot z+6\cdot i-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i \Rightarrow 3\cdot z-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i-5-6\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-4\cdot i)\cdot z=6-33\cdot i \Rightarrow (3-4\cdot i)\cdot z=6-33\cdot i \ /\cdot\frac{1}{3-4\cdot i} \Rightarrow z=\frac{6-33\cdot i}{3-4\cdot i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{6-33\cdot i}{3-4\cdot i}\cdot\frac{3+4\cdot i}{3+4\cdot i} \Rightarrow z=\frac{(6-33\cdot i)\cdot(3+4\cdot i)}{(3-4\cdot i)\cdot(3+4\cdot i)} \Rightarrow z=\frac{18-99\cdot i+24\cdot i-132\cdot i^2}{3^2+4^2} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow z=\frac{18-99\cdot i+24\cdot i-132\cdot(-1)}{9+16} \Rightarrow z=\frac{18-99\cdot i+24\cdot i+132}{25} \Rightarrow z=\frac{150-75\cdot i}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{150}{25}-\frac{75}{25}\cdot i \Rightarrow z=\frac{150}{25}-\frac{75}{25}\cdot i \Rightarrow z=6-3\cdot i \Rightarrow \operatorname{Im}(z)=-3.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Neka je z = x + y · i. Tada je y imaginarni dio od z.

$$5+3\cdot z+6\cdot i-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i \Rightarrow \left[z=x+y\cdot i\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+3\cdot(x+y\cdot i)+6\cdot i-4\cdot i\cdot(x+y\cdot i)=11-27\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+3\cdot x+3\cdot y\cdot i+6\cdot i-4\cdot x\cdot i-4\cdot y\cdot i^2=11-27\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+3\cdot x+3\cdot y\cdot i+6\cdot i-4\cdot x\cdot i-4\cdot y\cdot(-1)=11-27\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+3\cdot x+3\cdot y\cdot i+6\cdot i-4\cdot x\cdot i+4\cdot y=11-27\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x+3\cdot y\cdot i-4\cdot x\cdot i+4\cdot y=11-27\cdot i-5-6\cdot i \Rightarrow (3\cdot x+4\cdot y)+(-4\cdot x+3\cdot y)\cdot i=6-33\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednakost kompleksnih}\\ \text{brojeva}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3\cdot x+4\cdot y=6\\ -4\cdot x+3\cdot y=-33\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3\cdot x+4\cdot y=6 \;/\cdot 4\\ -4\cdot x+3\cdot y=-33 \;/\cdot 3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}12\cdot x+16\cdot y=24\\ -12\cdot x+9\cdot y=-99\end{array}\right\} \Rightarrow 25\cdot y=-75 \Rightarrow 25\cdot y=-75 \;/:25 \Rightarrow y=-3.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 229

Koliki je realni dio kompleksnoga broja z ako je $5+3\cdot z+6\cdot i-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i$?

$$A.\ 7 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ -3 \qquad D.\ \frac{6}{5}$$

Rezultat: B.

www.halapa.com

Zadatak 230 (NBA, maturant)

Kompleksni brojevi z za koje vrijedi $\operatorname{Re}\frac{z+1}{z-i}=0$ leže:

$A.$ na kružnici $x^2+y^2+x-y=0$ $\quad B.$ unutar kružnice $x^2+y^2-x-y=0$

$C.$ izvan kružnice $x^2+y^2-x+y=0$ $\quad D.$ na pravcu $x+y=1$

Rješenje 230

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}=0 \Rightarrow a=0.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \;\Rightarrow\; \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot q \cdot y + c = 0.$$

Neka je z = x + y · i. Najprije podijelimo $\frac{z+1}{z-i}$.

$$\frac{z+1}{z-i} = \frac{x + y \cdot i + 1}{x + y \cdot i - i} = \frac{(x+1) + y \cdot i}{x + (y-1) \cdot i} = \frac{(x+1) + y \cdot i}{x + (y-1) \cdot i} \cdot \frac{x - (y-1) \cdot i}{x - (y-1) \cdot i} = \frac{((x+1) + y \cdot i) \cdot (x - (y-1) \cdot i)}{(x + (y-1) \cdot i) \cdot (x - (y-1) \cdot i)} =$$

$$= \frac{x \cdot (x+1) + x \cdot y \cdot i - (x+1) \cdot (y-1) \cdot i - y \cdot (y-1) \cdot i^2}{x^2 + (y-1)^2} =$$

$$= \frac{x \cdot (x+1) + x \cdot y \cdot i - (x+1) \cdot (y-1) \cdot i - y \cdot (y-1) \cdot (-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x \cdot (x+1) + x \cdot y \cdot i - (x+1) \cdot (y-1) \cdot i + y \cdot (y-1)}{x^2 + (y-1)^2} =$$

$$= \frac{x \cdot (x+1) + y \cdot (y-1) + (x \cdot y - (x+1) \cdot (y-1)) \cdot i}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x \cdot (x+1) + y \cdot (y-1)}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{x \cdot y - (x+1) \cdot (y-1)}{x^2 + (y-1)^2} \cdot i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \operatorname{Re} \frac{z+1}{z-i} = \frac{x \cdot (x+1) + y \cdot (y-1)}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \dfrac{z+1}{z-i} = \dfrac{x \cdot (x+1) + y \cdot (y-1)}{x^2 + (y-1)^2} \\ \operatorname{Re} \dfrac{z+1}{z-i} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \; \frac{x \cdot (x+1) + y \cdot (y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (x+1) + y \cdot (y-1) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x^2 + x + y^2 - y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 + x - y = 0.$$

Odgovor je pod A.

www.halapa.com

Vježba 230

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 231 (Natalija, srednja škola)

Izračunaj: $(1-i)^2 \cdot (2-i)^2$.

$A. -8-6\cdot i \qquad B. 8+6\cdot i \qquad C. 8-6\cdot i \qquad D. -8+6\cdot i$

Rješenje 231

Ponovimo!

$$i^2 = -1 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n .$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 .$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d .$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z .$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c) .$$

1.inačica

$$(1-i)^2\cdot(2-i)^2 = \left(1-2\cdot i+i^2\right)\cdot\left(4-4\cdot i+i^2\right) = (1-2\cdot i-1)\cdot(4-4\cdot i-1) =$$

$$= (1-2\cdot i-1)\cdot(3-4\cdot i) = -2\cdot i\cdot(3-4\cdot i) = -6\cdot i + 8\cdot i^2 = -6\cdot i + 8\cdot(-1) =$$

$$= -6\cdot i - 8 = -8-6\cdot i .$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$(1-i)^2\cdot(2-i)^2 = ((1-i)\cdot(2-i))^2 = \left(2-i-2\cdot i+i^2\right)^2 = (2-i-2\cdot i-1)^2 =$$

$$= (1-3\cdot i)^2 = 1-6\cdot i+(3\cdot i)^2 = 1-6\cdot i+9\cdot i^2 = 1-6\cdot i+9\cdot(-1) =$$

$$= 1-6\cdot i-9 = -8-6\cdot i .$$

Odgovor je pod A.

Vježba 231

Izračunaj: $(i-1)^2 \cdot (2-i)^2$.

$A. -8-6\cdot i \qquad B. 8+6\cdot i \qquad C. 8-6\cdot i \qquad D. -8+6\cdot i$

Rezultat: A.

www.halapa.com

Zadatak 232 (Natalija, srednja škola)

U Gaussovoj ravnini prikaži skup svih točaka koje su zadane uvjetom

$$(1-i)\cdot\bar{z}=(1+i)\cdot z\ ,\ z=x+y\cdot i.$$

Rješenje 232

Ponovimo!

$$i^2=-1\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i\ \Rightarrow\ \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

$$(1-i)\cdot\bar{z}=(1+i)\cdot z\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} z=x+y\cdot i \\ \bar{z}=x-y\cdot i\end{bmatrix}\Rightarrow\ (1-i)\cdot(x-y\cdot i)=(1+i)\cdot(x+y\cdot i)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x-y\cdot i-x\cdot i+y\cdot i^2=x+y\cdot i+x\cdot i+y\cdot i^2\ \Rightarrow\ x-y\cdot i-x\cdot i+y\cdot i^2=x+y\cdot i+x\cdot i+y\cdot i^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -y\cdot i-x\cdot i=y\cdot i+x\cdot i\ \Rightarrow\ -y\cdot i-x\cdot i-y\cdot i-x\cdot i=0\ \Rightarrow\ -2\cdot x\cdot i-2\cdot y\cdot i=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\cdot x\cdot i-2\cdot y\cdot i=0\ /:(-2)\ \Rightarrow\ x\cdot i+y\cdot i=0\ \Rightarrow\ (x+y)\cdot i=0\ \Rightarrow\ x+y=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=-x.$$

Pravac je simetrala II. i IV. kvadranta.

Vježba 232

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 233 (Domagoj, gimnazija)

Kompleksni broj $z_1=-5\cdot\sqrt{3}+5\cdot i$ jedno je rješenje jednadžbe $z^3 = w$ gdje je w kompleksni broj. Napišite preostala dva rješenje te jednadžbe.

Rješenje 233

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

www.halapa.com

$$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad , \quad \sqrt[3]{a^3} = a.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 = a \cdot \sqrt{a} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} + c = \frac{a + b \cdot c}{b}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Svaki se kompleksan broj

$$z = x + y \cdot i$$

može prikazati u trigonometrijskom obliku

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

pri čemu je r modul kompleksnog broja

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

a kut φ argument kompleksnog broja za kojeg vrijedi

$$\varphi = arctg \frac{y}{x} \text{ ili } \varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \; , \; 0 \leq \varphi < 2 \cdot \pi.$$

Oznaka je

$$\varphi = \arg z.$$

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina.

Moivreova formula za izračunavanje korijena kompleksnog broja

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) \; , \; k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Zadano rješenje uvrstimo u jednadžbu i odredimo kompleksni broj w.

$$w = z^3 \Rightarrow \left[\, z = -5 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot i \,\right] \Rightarrow w = \left(-5 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot i\right)^3 \Rightarrow w = \left(-5 \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = (-5)^3 \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)^3 \Rightarrow w = -125 \cdot \left(\left(\sqrt{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot i + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot i^2 - i^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = -125 \cdot \left(3 \cdot \sqrt{3} - 9 \cdot i - 3 \cdot \sqrt{3} + i\right) \Rightarrow w = -125 \cdot \left(3 \cdot \sqrt{3} - 9 \cdot i - 3 \cdot \sqrt{3} + i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = -125 \cdot (-8 \cdot i) \Rightarrow w = 1000 \cdot i.$$

Možemo preoblikovati jednadžbu.

$$z^3 = w \Rightarrow z^3 = 1000 \cdot i \Rightarrow z^3 = 1000 \cdot i \; / \sqrt[3]{} \Rightarrow z = \sqrt[3]{1000 \cdot i} \Rightarrow z = \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{i} \Rightarrow$$

www.halapa.com

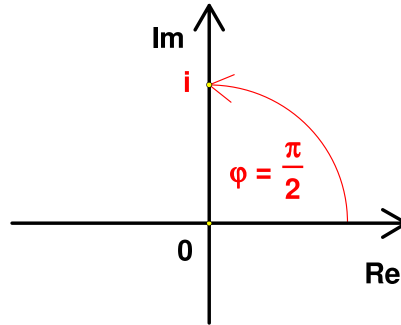
$$\Rightarrow \ z = 10 \cdot \sqrt[3]{i}.$$

Najprije nađemo trigonometrijski prikaz broja v = i.
Odredimo modul

$$v = i \ \Rightarrow \ v = 0 + 1 \cdot i \ \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ r = \sqrt{0^2 + 1^2} \ \Rightarrow \ r = 1.$$

Odredimo argument

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$



$$v = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \ \Rightarrow \ v = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) \ \Rightarrow \ v = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}.$$

Tada je

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi}{3}\right) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi}{3}\right),$$

k = 0, 1, 2.

Uvrštavajući redom za k = 0, 1, 2 dobivamo

- $k = 0, \ v_0 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) =$

$$= \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$$

- $k = 1, \ v_1 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi}{3}\right) =$

$$= \cos\frac{\frac{5 \cdot \pi}{2}}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{5 \cdot \pi}{2}}{3} = \cos\frac{5 \cdot \pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5 \cdot \pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$$

- $k = 2, \ v_2 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 4 \cdot \pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 4 \cdot \pi}{3}\right) =$

$$= \cos\frac{\frac{9 \cdot \pi}{2}}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{9 \cdot \pi}{2}}{3} = \cos\frac{9 \cdot \pi}{6} + i \cdot \sin\frac{9 \cdot \pi}{6} = \cos\frac{9 \cdot \pi}{6} + i \cdot \sin\frac{9 \cdot \pi}{6} = \cos\frac{3 \cdot \pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3 \cdot \pi}{2} =$$

www.halapa.com

$$=0-i=-i.$$

Konačna rješenja jednadžbe su:

$$z_o=10\cdot v_o=10\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)=5\cdot\sqrt{3}+5\cdot i$$

$$z_1=10\cdot v_1=10\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)=-5\cdot\sqrt{3}+5\cdot i$$

$$z_2=10\cdot v_2=10\cdot(-i)=-10\cdot i.$$

Vježba 233

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 234 (Felix, maturant)

Ako je $z=\frac{1-i}{1+i}+3+5\cdot i,$ onda je apsolutna vrijednost broja z jednaka:

$A.\ 4 \qquad B.\ 1+\sqrt{34} \qquad C.\ 5 \qquad D.\ 2$

Rješenje 234

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad i^2=-1.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad,\quad(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x+y\cdot i$ i $x-y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i\ \Rightarrow\ \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z=x+y\cdot i$ definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\quad,\quad n\neq 0\quad,\quad n\neq 1.$$

Množenje zagrada

www.halapa.com

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

$$z=\frac{1-i}{1+i}+3+5\cdot i\Rightarrow z=\frac{1-i}{1+i}+\frac{3+5\cdot i}{1}\Rightarrow z=\frac{1-i+(3+5\cdot i)\cdot(1+i)}{1+i}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{1-i+3+3\cdot i+5\cdot i+5\cdot i^2}{1+i}\Rightarrow z=\frac{1-i+3+3\cdot i+5\cdot i+5\cdot(-1)}{1+i}\Rightarrow z=\frac{1-i+3+3\cdot i+5\cdot i-5}{1+i}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{-1+7\cdot i}{1+i}\Rightarrow |z|=\left|\frac{-1+7\cdot i}{1+i}\right|\Rightarrow |z|=\frac{|-1+7\cdot i|}{|1+i|}\Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{(-1)^2+7^2}}{\sqrt{1^2+1^2}}\Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{1+49}}{\sqrt{1+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}\Rightarrow |z|=\sqrt{\frac{50}{2}}\Rightarrow |z|=\sqrt{\frac{50}{2}}\Rightarrow |z|=\sqrt{25}\Rightarrow |z|=5.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$z=\frac{1-i}{1+i}+3+5\cdot i\Rightarrow z=\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}+3+5\cdot i\Rightarrow z=\frac{(1-i)^2}{(1+i)\cdot(1-i)}+3+5\cdot i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{1-2\cdot i+i^2}{1^2+1^2}+3+5\cdot i\Rightarrow z=\frac{1-2\cdot i-1}{1+1}+3+5\cdot i\Rightarrow z=\frac{1-2\cdot i-1}{2}+3+5\cdot i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{-2\cdot i}{2}+3+5\cdot i\Rightarrow z=\frac{-2\cdot i}{2}+3+5\cdot i\Rightarrow z=-i+3+5\cdot i\Rightarrow z=3+4\cdot i\Rightarrow |z|=|3+4\cdot i|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+4^2}\Rightarrow |z|=\sqrt{9+16}\Rightarrow |z|=\sqrt{25}\Rightarrow |z|=5.$$

www.halapa.com

Odgovor je pod C.

Vježba 234

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 235 (Matija, maturant)

Neka je $f(z)=\frac{1}{z+3}$. Izračunajte koliko je $f\left(\sqrt{2}-3-i\right)$.

Rješenje 235

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\mathrm{Re}\,z\quad,\quad y=\mathrm{Im}\,z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \;\Rightarrow\; \overline{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

$$f(z) = \frac{1}{z+3} \Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{1}{\sqrt{2} - 3 - i + 3} \Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{1}{\sqrt{2} - 3 - i + 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{1}{\sqrt{2} - i} \Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{1}{\sqrt{2} - i} \cdot \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} + i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{\sqrt{2} + i}{\left(\sqrt{2} - i\right) \cdot \left(\sqrt{2} + i\right)} \Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{\sqrt{2} + i}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{\sqrt{2} + i}{2 + 1} \Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{\sqrt{2} + i}{3} \Rightarrow f\left(\sqrt{2} - 3 - i\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \cdot i.$$

Vježba 235

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 236 (Ines, maturantica)

Ako za kompleksni broj z vrijedi $\frac{z}{1 - 2 \cdot i} - \frac{2 \cdot \overline{z}}{1 + 2 \cdot i} = 5 \cdot i,$ koliko je $|z|$?

www.halapa.com

Rješenje 236

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \;\Rightarrow\; \overline{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i \iff a=c \;,\; b=d.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Neka je z = x + y · i. Tada vrijedi:

$$\frac{z}{1-2\cdot i}-\frac{2\cdot\bar{z}}{1+2\cdot i}=5\cdot i \Rightarrow \frac{x+y\cdot i}{1-2\cdot i}-\frac{2\cdot(x-y\cdot i)}{1+2\cdot i}=5\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y\cdot i}{1-2\cdot i}-\frac{2\cdot(x-y\cdot i)}{1+2\cdot i}=5\cdot i \;/\cdot(1-2\cdot i)\cdot(1+2\cdot i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)-2\cdot(x-y\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)=5\cdot i\cdot(1-2\cdot i)\cdot(1+2\cdot i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot x\cdot i+y\cdot i+2\cdot y\cdot i^2-(2\cdot x-2\cdot y\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)=5\cdot i\cdot\left(1^2+2^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot x\cdot i+y\cdot i+2\cdot y\cdot(-1)-\left(2\cdot x-4\cdot x\cdot i-2\cdot y\cdot i+4\cdot y\cdot i^2\right)=5\cdot i\cdot(1+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot x\cdot i+y\cdot i-2\cdot y-2\cdot x+4\cdot x\cdot i+2\cdot y\cdot i-4\cdot y\cdot i^2=5\cdot i\cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot x\cdot i+y\cdot i-2\cdot y-2\cdot x+4\cdot x\cdot i+2\cdot y\cdot i-4\cdot y\cdot(-1)=25\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot x\cdot i+y\cdot i-2\cdot y-2\cdot x+4\cdot x\cdot i+2\cdot y\cdot i+4\cdot y=25\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-x+2\cdot y)+(6\cdot x+3\cdot y)\cdot i=0+25\cdot i \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednakost}\\ \text{kompleksnih}\\ \text{brojeva}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-x+2\cdot y=0\\ 6\cdot x+3\cdot y=25\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-x+2\cdot y=0 \;/\cdot 6\\ 6\cdot x+3\cdot y=25\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6\cdot x+12\cdot y=0\\ 6\cdot x+3\cdot y=25\end{array}\right\} \Rightarrow 15\cdot y=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\cdot y=25 \;/:15 \Rightarrow y=\frac{25}{15} \Rightarrow y=\frac{25}{15} \Rightarrow y=\frac{5}{3}.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l}y=\frac{5}{3}\\ -x+2\cdot y=0\end{array}\right\} \Rightarrow -x+2\cdot\frac{5}{3}=0 \Rightarrow -x+\frac{10}{3}=0 \Rightarrow -x=-\frac{10}{3} \Rightarrow -x=-\frac{10}{3} \;/\cdot(-1) \Rightarrow x=\frac{10}{3}.$$

Sada je

www.halapa.com

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow z = \frac{10}{3} + \frac{5}{3} \cdot i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{9}} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{125}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{9}} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{25 \cdot 5}}{3} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{5}}{3} \Rightarrow |z| = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{3} \Rightarrow |z| = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{5}.$$

Vježba 236

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 237 (Alan Ford, maturant)

Ako $z \in C$ zadovoljava jednakost $z \cdot \bar{z} - z - |z|^2 = 2 - i$, onda je z jednako:

$A.\ z = 2 - i$ $B.\ z = -2 - i$ $C.\ z = 1 + 2 \cdot i$ $D.\ z = -2 + i$

Rješenje 237

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c \ , \ b = d.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + y \cdot i$ definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Neka je $z = x + y \cdot i$. Tada vrijedi:

$$z \cdot \bar{z} - z - |z|^2 = 2 - i \Rightarrow (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) - (x + y \cdot i) - \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 2 - i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - y \cdot i - \left(x^2 + y^2\right) = 2 - i \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y \cdot i - x^2 - y^2 = 2 - i \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - y \cdot i - x^2 - y^2 = 2 - i \Rightarrow -x - y \cdot i = 2 - i \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -x = 2 \\ -y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x = 2 \; / \cdot (-1) \\ -y = -1 \; / \cdot (-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -2 \\ y = 1 \end{matrix}\right\}.$$

Kompleksan broj z glasi:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow z = -2 + i.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 237

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 238 (Bodo, maturant)

Izračunajte apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $w = \frac{2-i}{i^{2021}}$.

Rješenje 238

Ponovimo!

$$\frac{n}{1} = n.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Svojstva modula:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad , \quad \left|z^n\right| = |z|^n.$$

$$|w| = \left|\frac{2-i}{i^{2021}}\right| \Rightarrow |w| = \frac{|2-i|}{\left|i^{2021}\right|} \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}{|i|^{2021}} \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{4+1}}{1^{2021}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{5}}{1} \Rightarrow |w| = \sqrt{5}.$$

Vježba 238

Odmor!

Rezultat: …

www.halapa.com